Sitzungsber. Abt. II (1999) 208: 123–142

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Operatormethoden für q-Identitäten VII: q-Catalan-Determinanten

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat Klasse am 17. Juni 1999 durch das w. M. Johann Cigler)

Zusammenfassung

Mit einer Variante des Finite Operator Calculus von G.-C. Rota (vgl. [10]) ergeben sich auf „natürliche“ Weise verschiedene q-Analoga der Catalan- und Motzkinzahlen. Außerdem erhält man damit einen weiteren Zugang zur Berechnung von Hankeldeterminanten aus diesen Zahlen.

Wir betrachten positive Gitterwege im $\mathbf{R}^2$, d.h. Gitterwege, die von (0,0) nach (n, k) gehen und nicht mehr auf die x-Achse zurückkehren mit Aufstiegen (1,1) der Höhe 1 und Abstiegen $(1,-i)$ der Höhen $i = 0,1,2,.$ wobei es bei jedem festen $i = 0,1,2,\ldots$ endlich viele Arten dieser Abstiege geben kann, die man sich verschieden gefärbt vorstellen kann. Wir schreiben einen solchen Gitterweg in der Form $v_1, v_2 . \quad v_n$, wobei $v_j = (u_k, \beta(u_k), \gamma(u_k), \alpha_j)$ das j-te Wegstück der Länge 1 bedeute. Dabei ist $u_k = \lambda(v_j)$ ein Aufstieg oder einer der gefärbten Abstiege, $\beta(v_j) = \beta(u_k) = -1$, falls u_k ein Aufstieg ist und $\beta(v_j) = \beta(u_k) = i$, falls u_k ein Abstieg der Höhe i ist, $\gamma(v_j) = \gamma(u_k)$ eine ganze Zahl und $\alpha_j + 1$ die Höhe des Endpunktes des Wegstückes v_j.

Wir ordnen nun jedem Aufstieg und Abstieg u ein Gewicht $w(u)$ zu und definieren das Gewicht des Gitterweges $v = v_1 v_2 \ldots v_n$ durch

$$w(v) := w(\lambda(v_1))w(\lambda(v_2)) \quad w(\lambda(v_n))q^{\alpha_1\gamma(v_1)+\cdots+\alpha_n\gamma(v_n)} \qquad (1)$$

Sei $a(n, k)$ das Gewicht der Menge aller positiven Gitterwege von (0,0) nach (n, k). Dann ist

$$a(n,k)=\sum_{u} w(u)q^{\gamma(u)(k-1)}a(n-1,\ k+\beta(u)), \tag{2}$$

mit den Randbedingungen

$$a(0,k)=\delta_{0,k} \text{ und } a(n,0)=\delta_{n,0},$$

wobei u den Aufstieg und alle gefärbten Abstiege durchläuft.

Denn jeder Weg von (0,0) nach (n, k) endet in einem Wegstück v der Länge 1 in der Höhe k, dessen Anfangspunkt der Punkt $(n-1, k+\beta(v))$ ist und dessen Gewicht $w(v)=w(\lambda(v))q^{(k-1)\gamma(v)}$ ist.

Ist $\gamma(u)=1$ für alle u so gilt auch

$$a(n,k+l)=\sum_{i=0}^{n} a(n-i,k)a(i,l)q^{ik} \tag{3}$$

Denn man betrachte das längste Anfangsstück des Weges, das auf der Höhe k endet. Dann hat das Reststück dasselbe Gewicht wie ein Weg von (0,0) nach (i, l) multipliziert mit q^{ik}, weil er in der Höhe k verläuft und daher jedes q^{α} durch $q^{\alpha+k}$ ersetzt wird.

Als Beispiel betrachten wir das Gewicht $b(n, k, s, q)$ aller positiven Gitterwege von (0,0) nach (n, k) mit Aufstiegen (1,1) der Höhe 1 und zwei verschieden gefärbten Abstiegen (1,0) der Höhe 0 sowie Abstiegen (1,−1) der Höhe 1. Wir ordnen jedem Aufstieg und einem der horizontalen Wegstücke das Gewicht 1 und jedem anderen der beiden Abstiege, die wir „ausgezeichnete Wegstücke" nennen wollen, das Gewicht s zu. Damit das in das obige Schema paßt, ordnen wir allen anderen möglichen Abstiegen das Gewicht 0 zu. Außerdem sei $\gamma(u)=1$ für alle u.

Dann ist das Gewicht eines Gitterweges v durch

$$w(v):=s^{l}q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}, \tag{4}$$

gegeben, wobei l die Anzahl der ausgezeichneten Wegstücke bedeutet.

In diesem Fall ergibt sich für das Gewicht

$$\begin{aligned} b(n,k,s,q)=q^{k-1}(b(n-1,k-1,s,q)+(1+s)b(n-1,k,s,q)\\ +sb(n-1,k+1,s,q)) \end{aligned} \tag{5}$$

mit den Randbedingungen

$$b(0,k,s,q)=\delta_{0,k} \text{ und } b(n,0,s,q)=\delta_{n,0}.$$

Sei nun $C(n,s,q) := b(n,1,s,q)$ für $n > 0$ und $C(0,s,q) = 1$. Dann gilt wegen (3)

$$C(n+1,s,q) = b(n+1,1,s,q) = (1+s)b(n,1,s,q) + sb(n,2,s,q)$$
$$= C(n,s,q) + sC(n,s,q) + s\sum_{i=0}^{n} b(n-i,1,s,q)\, b(i,1,s,q)q^i$$
$$= C(n,s,q) + sC(n,s,q) + s\sum_{i=1}^{n-1} b(n-i,1,s,q)b(i,1,s,q)q^i$$
$$= C(n,s,q) + s\sum_{i=0}^{n-1} C(n-i,s,q)C(i,s,q)q^i \tag{6}$$

Die $C(n,s,q)$ sind also im wesentlichen die Polya-Gessel'schen q-Catalanzahlen $1, 1, 1+s, 1+2s+qs+s^2, 1+3s+2qs+q^2s+3s^2, \ldots$ (vgl. [7]).

Für die erzeugende Funktion

$$C(t) := \sum_{n=0}^{\infty} C(n,s,q)t^n$$

ergibt sich daraus

$$C(t) = 1 + tC(t) + stC(t)(C(qt) - 1).$$

Für $q = 1$ und $z(t) = C(t) - 1$ reduziert sich das auf

$$z(t) = t(1 + z(t))(1 + sz(t)).$$

Aus der Formel von Lagrange ergibt sich daher die wohlbekannte Formel

$$C(n,s,1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i+1} s^i$$

Für $s = 1$ ergibt sich schließlich die klassische Catalanzahl

$$C(n,1,1) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

In [1] hat M. Aigner eine einfache elementare Methode angegeben, um die Determinanten der Hankelmatrizen

$$H_n^h = \begin{pmatrix} C_h & C_{h+1} & C_{h+2} & & C_{h+n-1} \\ C_{h+1} & C_{h+2} & C_{h+3} & & C_{h+n} \\ C_{h+2} & C_{h+3} & C_{h+4} & & \\ & & & & \\ C_{h+n-1} & & & & \end{pmatrix} \tag{7}$$

für $h=0,1,2$ und andere damit verwandte Matrizen zu berechnen. Ich möchte zunächst einen anderen Zugang zu derartigen Resultaten geben und dann mittels einer Variante des Rota'schen Finite Operator Calculus (vgl. [10]) ein paar „natürliche" q-Analoga der Catalan- und Motzkinzahlen angeben und für diese analoge Determinanten berechnen. Nach einer persönlichen Mitteilung von C. Krattenthaler lassen sich fast alle dieser Hankeldeterminanten auch auf rein kombinatorischem Weg aus einem Resultat von Gessel und Viennot [8] über nichtüberschneidende Gitterwege im $\mathbf{R}^2$ beweisen. Während diese Methode im Fall $q=1$ einfacher als die hier vorgeschlagene Methode ist und auch allgemeinere Resultate liefert, ergeben sich für allgemeines q damit nur Rekurrenzrelationen, während die hier betrachtete Methode explizite Formeln liefert.
Nach den obigen Überlegungen ist für $s=1$

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{z(t)}{(1+z(t))^2} \right)^n \quad \text{und daher} \\ 1+z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{z(t)}{(1+z(t))^2} \right)^n \end{aligned} \tag{8}$$

Sei nun Δ der Differenzenoperator und E der Verschiebungsoperator auf dem Vektorraum der Polynome, definiert durch $Ef(x)=f(x+1)$ und $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$. Dann ergibt sich aus (8), daß für den identischen Operator I auf dem Vektorraum der Polynome die Identität

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} C_k E^{-2k-1} \Delta^k \tag{9}$$

erfüllt ist.
Wir wenden diese bei festem $n \geq 1$ auf die Polynome

$$f_l(x) = E^{l-1} \binom{x+l-1}{n+l-1} = \binom{x+2l-2}{n+l-1}, l = 0, 1, \ldots, n, \tag{10}$$

an und erhalten

$$\begin{aligned} f_l(x) = \binom{x+2l-2}{n+l-1} &= \sum C_k \binom{x+2l-2k-3}{n+l-k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} C_{l+j} \binom{x+n+j-1}{2j+1} \end{aligned}$$

Dazu äquivalente Formeln wurden auf anderem Weg auch in [9] bewiesen und dort „Jonah's theorem" genannt.

Daraus folgt

$$f_l(1) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j C_{l+j} \text{ mit} \tag{11}$$

$$b_j = (-1)^{n+j+1} \binom{n+j}{2j+1}. \tag{12}$$

Nun ist

$$f_0(1) = (-1)^{n-1} \tag{13}$$

$$f_l(1) = 0,\ l = 1, .\ ., n-1, \text{ und} \tag{14}$$

$$f_n(1) = 1. \tag{15}$$

Das bedeutet daß $(-1)^{n-1}$ $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ die erste Zeile der Inversen der Matrix H_n^0 ist und daß $(b_0, .\ ., b_{n-1})$ die letzte Zeile der Inversen der Matrix H_n^1 ist.

Aus der Cramer'schen Regel ergibt sich somit

$$\frac{\det H_{n-1}^2}{\det H_n^0} = \frac{b_0}{f_0(1)} = \binom{n}{1}, \tag{16}$$

$$\frac{\det H_{n-1}^1}{\det H_n^0} = \frac{b_{n-1}}{f_0(1)} = 1, \tag{17}$$

$$\frac{\det H_{n-1}^1}{\det H_n^1} = \frac{b_{n-1}}{f_n(1)} = 1, \tag{18}$$

$$\frac{\det H_{n-1}^2}{\det H_n^1} = \frac{b_0}{f_n(1)} = \binom{n}{1}. \tag{19}$$

Somit erhalten wir die bekannten Resultate $\det H_n^0 = \det H_n^1 = 1$ und $\det H_n^2 = n + 1$.

Im Fall der q-Analoga gehen wir ein wenig anders vor: Um nicht Trivialitäten wiederholen zu müssen, verwenden wir im folgenden Terminologie und einfache Resultate von [3] bzw. [6]. Insbesondere bedeute $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (q^n - 1) \quad (q^{n-k+1} - 1)/(q^k - 1) \quad (q-1)$den $q-$ Binomialkoeffizienten, ein Ausdruck der Gestalt $f(x) = \sum a_k(q) q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$ werde q-Polynom genannt, $Ef(x) = f(x+1)$ sei der Verschiebungsoperator auf den q-Polynomen, ε der lineare Operator mit $\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = q^n \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$ und Δ der q-Differenzenoperator, der durch $\Delta q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = q^{\left[{n-1 \atop 2}\right]} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$ eindeutig definiert ist. Wegen $\begin{bmatrix} x+1 \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} + q^{x-n+1} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$ gilt $\Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{q^x}$ für alle q-Polynome.

Es gilt dann $E^{-1}\Delta\left[{x+n-1 \atop n}\right] = \left[{x+n-2 \atop n-1}\right]$, $E = \varepsilon(1+\Delta)$, $\Delta\varepsilon = q\varepsilon\Delta$, sowie

$$\begin{bmatrix} -x \\ n \end{bmatrix} = (-1)^n q^{-nx-\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n+x-1 \\ n \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$\Delta \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \sum q^{k-i-1} \begin{bmatrix} x+k-i-2 \\ k-i-1 \end{bmatrix}.$$

Wir ordnen nun jeder durch (2) definierten Matrix eine Folge von q-Polynomen $G_n(x, q)$ zu durch

$$G_n(x,q) := \sum_{k=0}^{n} a(n,k) q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \tag{20}$$

Diese erfüllen $G_0(x, q) = 1$, $G_n(0,q) = \delta_{n,0}$ und

$$\Delta G_n(x,q) = \left(\sum_u w(u) \varepsilon^{\gamma(u)} \Delta^{\beta(u)+1} \right) G_{n-1}(x,q). \tag{21}$$

Außerdem ist

$$G_n(1,q) := \sum_{k=0}^{n} a(n,k) q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} = a(n,1) \text{ für } n > 0. \tag{22}$$

Denn der Koeffizient von $q^{\binom{k-1}{2}}\left[{x \atop k-1}\right]$ ist links $a(n, k)$ und wegen $\varepsilon^\gamma \Delta^{\beta+1} q^{\binom{k}{2}}\left[{x \atop k}\right] = q^{\gamma(k-\beta-1)} q^{\binom{k-\beta-1}{2}} \left[{x \atop k-\beta-1}\right]$ rechts $\sum_u w(u) q^{\gamma(u)(k-1)}$ $a(n-1, k+\beta(u))$.

Bezeichnet man also mit K den Operator

$$K = \left(\sum_u w(u) \varepsilon^{\gamma(u)} \Delta^{\beta(u)+1} \right)^{-1} \Delta, \tag{23}$$

so gilt

$$KG_n(x,q) = G_{n-1}(x,q). \tag{24}$$

Im Fall (5), d.h. für $a(n, k) = b(n, k, s, q)$, nennen wir die entsprechenden q-Polynome $A_n(x, s, q)$.

Ist $\gamma(u) = 1$ für jedes u, so ist

$$K^n = q^{-\binom{n}{2}} \varepsilon^{-n} \left(\sum w(u) \frac{\Delta^{\beta(u)+1}}{q^{\beta(u)+1}} \right)^{-1}$$

$$\left(\sum w(u) \frac{\Delta^{\beta(u)+1}}{q^{(\beta(u)+1)n}} \right)^{-1} \Delta^n \text{ und}$$

daher gibt es eine eindeutig bestimmte Entwicklung der Gestalt $\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \varepsilon^k K^k$. Wendet man diese Operatoridentität für q-Polynome auf $G_n(x, q)$ an, so ergibt sich

$$\Delta G_n(x,q) = \sum s_k \varepsilon^k G_{n-k}(x,q) \text{ und daher}$$
$$s_n = \Delta G_n(x,q)|_{x=0} = a(n,1).$$

Wir erhalten somit als Verallgemeinerung von (9) die Formel

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} a(k,1) \varepsilon^k K^k \tag{25}$$

Es ist klar, daß jedes q-Polynom auch eine eindeutige Darstellung der Gestalt $\Sigma a_k G_k(x, q)$ besitzt.

Mit Hilfe der q-Polynome $A_n(x, s, q)$ können wir auch zeigen, daß die in [5] eingeführten q-Catalanzahlen $c_n(q)$ mit den $C(n, 1, q)$ übereinstimmen. Zu diesem Zweck schreiben wir $A_n(x, s, q)$ in der Gestalt

$$A_n(x,s,q) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k,s,q) \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Dann ist (5) äquivalent mit

$$c(n,k,s,q) = c(n-1,k-1,s,q) + q^{k-1} s \sum_{i=0}^{n-k-1} c(n-1,k+i,s,q). \tag{26}$$

Das ergibt sich sofort durch Koeffizientenvergleich, wenn man beachtet, daß

$$\Delta \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \sum q^{k-i-1} \begin{bmatrix} x+k-i-2 \\ k-i-1 \end{bmatrix} \text{ist.}$$

Denn aus $E^{-1}\Delta G_n(x, s, q) = (1 + s\Delta) G_{n-1}(x, s, q)$ folgt

$$\sum c(n,k,s,q) \begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix} = \sum c(n-1,k-1,s,q) \begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}$$
$$+ s \sum c(n-1,k-1,s,q) \sum q^{k-i-1} \begin{bmatrix} x+k-i-2 \\ k-i-1 \end{bmatrix}$$

Das liefert den folgenden

Satz 1. *Betrachtet man die positiven Gitterwege im* R^2, *die von* (0,0) *nach* (n, k) *gehen mit Aufstiegen* (1,1) *der Höhe 1 und Abstiegen* $(1, -i)$ *beliebiger Höhe* $i, i = 0,1,2,$. *und ordnet man einem Gitterweg* v *das Gewicht*

$$w(v) := s^l q^{\sigma_1 + \cdots + \sigma_l}, \tag{27}$$

zu wobei l die Anzahl der Abstiege des Weges bedeutet und $\sigma_i + 1$ die Höhe des Endpunktes des i-ten Abstiegs ist, dann ist das Gewicht der Menge dieser Gitterwege von (0,0) *nach* (n, k) *gegeben durch*

$$c(n,k,s,q) = c(n-1,k-1,s,q) + q^{k-1}s \sum_{i=0}^{n-k-1} c(n-1,k+i,s,q)$$

mit den Randbedingungen $c(0, k, s, q) = \delta_{0,k}$ *und* $c(n, 0, s, q) = \delta_{n,0}$ *und erfüllt*

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k,s,q) \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} = A_n(x,s,q).$$

Speziell ergibt sich

$$c(n+1,1,s,q) = s\sum c(n,i,s,q) = sA_n(1,s,q) = sC(n,s,q). \quad (28)$$

Ersetzt man nun jeden Abstieg der Höhe i durch einen Aufstieg gefolgt von $i+1$ Abstiegen der Höhe 1, so wird jedem ursprünglichen Gitterweg von (0,0) nach $(n, 1)$ ein positiver Gitterweg von (0,0) nach $(2n-1,1)$ mit Auf- und Abstiegen der Höhe 1, also ein Catalanweg, zugeordet. Jedem Abstieg der Höhe i des ursprünglichen Weges wird dabei ein absteigender Weg bestehend aus $i+1$ Abstiegen der Höhe 1 des neuen Weges zugeordnet. Der Endpunkt eines derartigen absteigenden Weges liegt auf derselben Höhe wie der Endpunkt des entsprechenden Abstieges des alten Weges. Somit fällt $c(n, 1, s, q)$ mit dem Gewicht aller positiven Gitterwege von (0,0) nach $(2n-1,1)$ mit Auf- und Abstiegen der Höhe 1 zusammen, wobei jedes „Tal" das Gewicht $q^{\sigma}s$ besitzt, wobei $\sigma + 1$ die Höhe des Tales ist und zusätzlich der Endpunkt mit dem Gewicht s aufscheint. Läßt man das Gewicht des Endpunktes weg und betrachtet man die übliche Zerlegung der Catalanwege in den ersten Weg, der wieder auf die Höhe 1 zurückkehrt und den Restweg, so ist klar, daß

$$\begin{aligned} C(n,s,q) &= C(n-1,qs,q) + s\sum_{i=0}^{n-2} C(i,qs,q)\, C(n-1-i,s,q), \\ C(0,s,q) &= 1 \end{aligned} \quad (29)$$

gilt. Das ist eine weitere wohlbekannte Charakterisierung der Polya-Gessel'schen q-Catalanzahlen $C(n, s, q)$ (vgl. z.B. [7]).

Sei nun $H_n(k, q)$ das Gewicht der Gitterwege von (0,0) nach $(2n+k, k)$ mit genau n Abstiegen der Höhe 1. Ordnet man einem Gitterweg ν das Gewicht

$$w(\nu) := q^{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n}$$

zu, wobei $\sigma_i + 1$ die Höhe des Endpunktes des i-ten Abstiegs ist, dann gilt

$$H_n(k,q) = H_n(k-1,q) + q^{k-1}H_{n-1}(k+1,q)$$

oder anders ausgedrückt

$$\Delta H_n(x,q) = E^2 H_{n-1}(x,q) \text{ und } H_n(0,q) = \delta_{n,0}.$$

Wegen $E^2 = \varepsilon(1+\Delta)\,\varepsilon(1+\Delta) = \varepsilon^2(1+\Delta+q\Delta+q\Delta^2)$ liefert ein Vergleich mit (21), daß

$$H_n(x,q) = \sum b(n,k,q,q^2) q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$$

und daher

$$H_n(1,q) = C(n,q,q^2) \text{ ist.}$$

Auch hier gilt wie bei (3)

$$H_n(k+l,q) = \sum H_i(k,q) H_{n-i}(l,q) q^{li},$$

weil beim Restweg jeder der i Abstiege um l Einheiten nach oben verschoben wird.

Somit ist

$$H_{n+1}(1,q) = H_{n+1}(0,q) + H_n(2,q) = \sum_{i=0}^{n} H_i(1,q) H_{n-i}(1,q) q^i$$

Setzt man $H_n(1,q) = C_n(q)$, so gilt also

$$C_{n+1}(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k C_k(q) C_{n-k}(q),\; C_0(q) = 1. \tag{30}$$

Das ist die definierende Gleichung der Carlitz' schen q-Catalanzahlen $1, 1, 1+q, 1+2q+q^2+q^3, 1+3q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5+q^6, \ldots$ Wir erhalten also das wohlbekannte Resultat (vgl. [7]), daß

$$C_n(q) = C(n,q,q^2) \text{ ist.}$$

Betrachtet man die Entwicklung

$$H_n(x,q) = \sum d(n,k) \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}, \text{ so ist}$$

$$E^{-1}\Delta H_n(x,q) = E H_{n-1}(x,q) = \sum d(n-1,l) \begin{bmatrix} x+l \\ l \end{bmatrix}.$$

Aus $\left[{x+n \atop n}\right] = \sum q^{n-k}\left[{x+n-k-1 \atop n-k}\right]$ ergibt sich daher

$$E^{-1}\Delta H_n(x,q) = \sum d(n-1,l)\sum q^{l-i}\begin{bmatrix} x+l-i-1 \\ l-i \end{bmatrix}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$d(n,k) = q^{k-1}\sum_{l\geq k-1} d(n-1,l).$$

Daher ist

$$C_n(q) = H_n(1,q) = \sum d(n,k).$$

Das ergibt

Satz 2. *Ordnet man einem Gitterweg* v *von* (0,0) *nach* (n, k) *mit Aufstiegen* (1,1) *der Höhe 1 und Abstiegen* $(1,-i)$ *beliebiger Höhe* i, $i = 0,1,2,..$ *das Gewicht* $w(v) := q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}zu$, *dann ist das Gesamtgewicht aller Wege von* (0,0) *nach* $(n,1)$ *gegeben durch die Carlitz'sche q-Catalanzahl* $C_{n-1}(q)$.

Setzt man $B_n(x,q) = q^{n+\binom{x}{2}}H_n(x,q)$, so gilt

$$B_n(k,q) = q^{k-1}B_n(k-1,q) + B_{n-1}(k+1,q).$$

Definiert man daher das Gewicht eines Catalanweges durch $q^{\Sigma\tau_i}$, wobei τ_i+1 die Höhe des Endpunktes des i-ten Aufstieges ist, so ergibt sich für das Gesamtgewicht der Catalanwege $q^nC_n(q)$.

Setzt man $D_n(x,q) = q^{n+\binom{x}{2}}H_n(x,q^2)$, so gilt

$$B_n(k,q) = q^{k-1}B_n(k-1,q) + q^{k-1}B_{n-1}(k+1,q).$$

Definiert man daher das Gewicht eines Catalanweges durch $q^{\Sigma\alpha_i}$, so ergibt sich für das Gesamtgewicht der Catalanwege $q^nC_n(q^2)$.

Sei nun T der lineare Operator auf den q-Polynomen, der durch $Tq^{\binom{k}{2}}\left[{x \atop k}\right] = q^{\binom{k+1}{2}}\left[{x \atop k+1}\right]$ definiert ist und offensichtlich $\Delta T = I$, sowie $T\Delta\left[{x \atop k+1}\right] = \left[{x \atop k+1}\right], k \geq 0$ erfüllt. Sei K ein Operator der Gestalt $K = (a\varepsilon^\lambda + b\varepsilon^\mu\Delta + c\varepsilon^\nu\Delta^2)^{-1}\Delta$ und $B_n(x)$ die durch (20) definierten q-Polynome mit $KB_n = B_{n-1}$.

Dann ist

$$T(a\varepsilon^\lambda + b\varepsilon^\mu\Delta + c\varepsilon^\nu\Delta^2)B_n = T(a\varepsilon^\lambda + b\varepsilon^\mu\Delta + c\varepsilon^\nu\Delta^2)KB_{n+1} = B_{n+1}.$$

Sei nun

$$f_{n,1}(x) := q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n,j}B_{j+1}, n \geq 1. \qquad (31)$$

Dann ist

$$f_{n,l}(x) := (T(a\varepsilon^{\lambda} + b\varepsilon^{\mu}\Delta + c\varepsilon^{\nu}\Delta^2))^{l-1} q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} b_{n,j} B_{j+l}, 0 \leq l \leq n. \tag{32}$$

Nun ist

$$T(a\varepsilon^{\lambda} + b\varepsilon^{\mu}\Delta + c\varepsilon^{\nu}\Delta^2) q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} =$$
$$= aq^{\lambda n} q^{\binom{n+1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n+1 \end{bmatrix} + bq^{\mu(n-1)} q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$$
$$+ cq^{\nu(n-2)} q^{\binom{n-1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$$

eine Linearkombination von $\left[{x \atop n-1}\right]$, $\left[{x \atop n}\right]$, $\left[{x \atop n+1}\right]$ und daher ist für $l \geq 1$ $T(a\varepsilon^{\lambda} + b\varepsilon^{\mu}\Delta + c\varepsilon^{\nu}\Delta^2))^{l}\left[{x \atop n}\right]$ eine Linearkombination von $\left[{ \atop n-l}\right]$, $\left[{x \atop n-l+1}\right]$, $\quad$, $\left[{x \atop n+l}\right]$.
Daher gilt

$$f_{n,l}(1) = 0, 1 \leq l \leq n-1. \tag{33}$$

Außerdem folgt daraus

$$f_{n,n}(1) = c^{n-1} q^{\nu\binom{n-1}{2}} \tag{34}$$

Vergleicht man die Koeffizienten von B_{n+1} in $T(a\varepsilon^{\lambda} + b\varepsilon^{\mu}\Delta + c\varepsilon^{\nu}\Delta^2) f_{n,1}(x) = f_{n,2}(x)$, so ergibt sich $b_{n,n-1} = aq^{\lambda n} b_{n+1,n}$. Wegen $B_1(x) = a\left[{x \atop 1}\right]$ ist daher

$$b_{n,n-1} = \frac{1}{a^n q^{\lambda\binom{n}{2}}}. \tag{35}$$

Beim Vergleich der Koeffizienten von B_1 in $T(a\varepsilon^{\lambda} + b\varepsilon^{\mu}\Delta + c\varepsilon^{\nu}\Delta^2) f_{n,1}(x) = f_{n,2}(x)$ ergibt sich die Rekurrenz $0 = aq^{\lambda n} b_{n+1,0} + bq^{\mu(n-1)} b_{n,0} + cq^{\nu(n-2)} b_{n-1,0}$, aus der man $b_{n,0}$ berechnen kann. Wir wollen aber für die uns interessierenden Spezialfälle eine explizite Formel ableiten. Dazu definieren wir noch $f_{n,0}(x) := (a\varepsilon^{\lambda} + b\varepsilon^{\mu}\Delta + c\varepsilon^{\nu}\Delta^2)^{-1} \Delta f_{n,1}(x)$. Im Fall

$$K = E^{-1}(1 + s\Delta)^{-1}\Delta = (1+\Delta)^{-1}\left(1 + \frac{s\Delta}{q}\right)^{-1} \varepsilon^{-1}\Delta$$

ergibt sich

$$f_{n,0}(x) = (1+s\Delta)^{-1} q^{\binom{n-1}{2}} \begin{bmatrix} x-1 \\ n-1 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s^i \Delta^i E^{-1} q^{\binom{n-1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s^i q^{-i} E^{-1} q^{\binom{n-i-1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-i-1 \end{bmatrix}$$

und daher

$$f_{n,0}(1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s^i q^{-i+\binom{n-1-i}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ n-i-1 \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \left(\frac{s}{q}\right)^{n-1}$$

Hier ist

$$b_{n,0} = f_0(0) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s^i q^{-i} q^{\binom{n-1-i}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ n-i-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s^i q^{-i} q^{\binom{n-1-i}{2}} (-1)^{(n-i-1)}$$

$$q^{-(n-i-1)-\binom{n-1-i}{2}} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ n-i-1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} q^{-n+1} \sum_{i=0}^{n-1} s^i$$

und nach (35) gilt

$$b_{n,n-1} = q^{-\binom{n}{2}} \tag{36}$$

Jetzt liefert dieselbe Überlegung wie oben

$$\frac{\det H_{n-1}^2}{\det H_n^0} = \frac{b_{n,0}}{f_{n,0}(1)} = \frac{1+s+s^2+\qquad+s^{n-1}}{s^{n-1}}, \tag{37}$$

$$\frac{\det H_{n-1}^1}{\det H_n^0} = \frac{b_{n,n-1}}{f_{n,0}(1)} = \frac{1}{q^{\binom{n-1}{2}} s^{n-1}}, \tag{38}$$

$$\frac{\det H_{n-1}^1}{\det H_n^1} = \frac{b_{n,n-1}}{f_{n,n}(1)} = \frac{1}{q^{(n-1)^2} s^{n-1}}, \tag{39}$$

$$\frac{\det H_{n-1}^2}{\det H_n^1} = \frac{b_{n,0}}{f_{n,n}(1)} = \frac{1+s+\qquad+s^{n-1}}{q^{\binom{n}{2}} s^{n-1}}. \tag{40}$$

Daraus ergibt sich der

Satz 3. *Sei $(C(n, s, q))$ die Folge der Polya-Gessel-Catalanzahlen, die durch $C(0, s, q) = 1$ und die Rekursion*

$$C(n+1,s,q) = C(n,s,q) + s\sum_{i=0}^{n-1} C(n-i,s,q)C(i,s,q)q^i$$

definiert ist. Dann haben die Hankelmatrizen $H_n^h(s,q) = (C(i+j+h,s,q))_{i,j=0}^{n-1}$ die folgenden Determinanten:

$$\det H_n^0(s,q) = s^{\binom{n}{2}} q^{1^2+2^2+\cdots(n-1)^2-\binom{n}{2}} \tag{41}$$

$$\det H_n^1(s,q) = s^{\binom{n}{2}} q^{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2} \tag{42}$$

$$\det H_n^2(s,q) = s^{\binom{n}{2}} q^{1^2+2^2+\cdots+n^2-\binom{n+1}{2}} (1+s+s^2+ \quad +s^n) \tag{43}$$

Speziell ergeben sich für die Carlitz'schen q-Catalanzahlen $C(n, q, q^2)$ die Werte

$$\det H_n^0(q,q^2) = q^{2(1^2+2^2+\cdots(n-1)^2)-\binom{n}{2}}$$

$$\det H_n^1(q,q^2) = q^{2(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)+\binom{n}{2}}$$

und

$$\det H_n^2(q,q^2) = q^{2(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)+3\binom{n}{2}}[n+1].$$

Nun wollen wir noch dieselbe Methode auf zwei q-Analoga der Motzkinzahlen anwenden.

Wir betrachten zuerst die in [6] betrachteten q-Motzkinzahlen. Sei $(d(n, k, s))$ die Matrix mit $d(n, 0, s) = \delta_{n,0}$, $d(0, k, s) = \delta_{0,k}$ und

$$d(n,k,s) = q^{k-1}(d(n-1,k-1,s) + d(n-1,k,s) + sd(n-1,k+1,s)). \tag{44}$$

Dann gibt $d(n, k, s)$ das Gewicht aller positiven Gitterwege im $\mathbf{R}^2$ an, die von (0,0) nach (n, k) gehen und nicht mehr auf die x-Achse zurückkehren mit Aufstiegen (1,1) der Höhe 1 und Abstiegen (1,0) der Höhe 0 sowie (1,−1) der Höhe 1. Wir ordnen dabei jedem Aufstieg und Abstieg der Höhe 0 das Gewicht 1 und jedem Abstieg der Höhe 1 das Gewicht s zu. Sei $\alpha_i + 1$ die Höhe des Gitterweges nach dem i-ten Wegstück. Dann definieren wir das Gewicht eines Gitterweges v wieder durch

$$w(v) := s^l q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}, \tag{45}$$

wobei l die Anzahl der Abstiege der Höhe 1 des Weges bedeutet.

Unter der q-Motzkinzahl $M_n(q)$ verstehen wir wie in [6] das Gewicht $M_n(q) = d\,(n+1{,}1{,}1)$ der Motzkinwege mit $s = 1$. Allgemein sei $M_n(s, q) = d(n+1, s, 1)$.
Sei nun

$$D_n(x, 1, s, q) = \sum_{k=0}^{n} d(n, k, s) q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \tag{46}$$

und

$$D_n(1, 1, s, q) = M_{n-1}(s, q). \tag{47}$$

Dann folgt zunächst aus (25)

$$\Delta = \sum_{k \geq 1} M_{k-1}(s, q) \varepsilon^k K^k \text{ und daher}$$

$$\Delta D_{n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n} M_k \varepsilon^{k+1} D_{n-k}(1)$$

$$= M_n + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} M_k(s, q) M_{n-k-1}(s, q).$$

Die linke Seite ist

$$d(n+1, 1, s) + \frac{d(n+2, 1, s) - d(n+1, 1, s)}{s}.$$

Daher ergibt sich schließlich

$$M_{n+1}(s, q) = M_n(s, q) + s \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} M_k(s, q) M_{n-k-1}(s, q). \tag{48}$$

Das ergibt die Folge

$$1, 1, 1 + qs, 1 + 2qs + q^2 s, 1 + 3qs + 2q^2 s + q^3 s + q^2 s^2 + q^4 s^2,$$

Für die in (32) definierten Funktionen $f_{n,l}(x)$ gilt also hier

$$f_{n,l}(1) = 0, 1 \leq l \leq n-1,$$

$$f_{n,n}(1) = s^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}} \text{ und}$$

$$b_{n,n-1} = q^{-\binom{n}{2}}$$

Wegen

$$f_{n,0}(x) = (1 + \Delta + s\Delta^2)^{-1}\varepsilon^{-1}\Delta q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} =$$

$$= q^{-(n-1)}\sum(-1)^i\Delta^i\sum\binom{i}{j}s^j\Delta^j q^{\binom{n-1}{2}}\begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum\sum_j(-1)^{k-j}\binom{k-j}{j}q^{-(n-1)+\binom{n-1-k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ n-1-k \end{bmatrix}$$

ist

$$b_{n,0} = (-1)^{n-1}q^{-(n-1)}\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{n-1-j}{j}s^j$$

Somit ergeben sich für die Hankelmatrizen $K_n^b = (M_{i+j+b}(s,q))_{i,j=0}^{n-1}$ die Formeln

$$\frac{K_{n-1}^0}{K_n^0} = \frac{b_{n,n-1}}{f_{n,n}(1)} = \frac{1}{q^{(n-1)^2}s^{n-1}} \tag{49}$$

und

$$\frac{K_{n-1}^1}{K_n^0} = \frac{(-1)^{n-1}b_{n,0}}{f_{n,n}(1)} = q^{-\binom{n}{2}}s^{-(n-1)}\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{n-1-j}{j}s^j \tag{50}$$

Daraus ergibt sich schließlich

Satz 4. *Seien $M_n(s,q)$ die gewichteten q-Motzkinzahlen, dann haben die Hankelmatrizen $K_n^b(s,q) = (M_{i+j+b}(s,\ q))_{i,j=0}^{n-1}$ die folgenden Determinanten:*

$$\det K_n^0(s,q) = s^{\binom{n}{2}}q^{1^2+2^2+\cdots(n-1)^2} \tag{51}$$

und

$$\det K_n^1(s,q) = s^{\binom{n}{2}}q^{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+\binom{n}{2}}\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{n-j}{j}s^j \tag{52}$$

Nun wollen wir noch eine andere Klasse von q-Motzkinzahlen betrachten, die sich auch auf natürliche Weise mittels der Operatormethode ergibt.

Dazu definieren wir die q-Polynome $F_n(x)$ durch

$$F_n(x) = \sum f(n,k,t)q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \tag{53}$$

mit

$$\Delta F_n(x) = \left(tE + \frac{1}{q}\Delta^2\right)F_{n-1}(x) = \left(t\varepsilon + t\varepsilon\Delta + \frac{1}{q}\Delta^2\right)F_{n-1}(x). \tag{54}$$

Dann ist also

$$f(n,k,t) = q^{k-1}tf(n-1,k-1,t) + q^{k-1}tf(n-1,k,t) + \frac{1}{q}f(n-1,k+1,t).$$

Hier werden also die Aufstiege und die horizontalen Abstiege ausgezeichnet, mit dem Gewicht t versehen und mit der Höhe ihrer Endpunkte gewichtet. Die Abstiege der Höhe 1 haben das Gewicht $(1/q)$ und ihre Endpunkte tragen nichts zum Gesamtgewicht bei.

Es ist wieder klar, daß die Formel

$$f(n,k+l,t) = \sum f(n-i,k,t)f(i,l,q^k t)$$

erfüllt ist.

Wir setzen nun $m_{n-1}(t,q) := f(n,1,t) = F_n(1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} m_{n+1}(t,q) &= f(n+2,1,t) = tf(n+1,1,t) + \frac{1}{q}f(n+1,2,t) = \\ &= tm_n(t,q) + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{n+1} f(n+1-i,1,t)f(i,1,qt) = \\ &= tm_n(t,q) + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{n-1} m_i(qt,q)m_{n-i-1}(t,q). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$m_{n+1}(t,q) = tm_n(t,q) + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{n-1} m_i(qt,q)m_{n-i-1}(t,q),\ m_0(t,q) = t. \tag{55}$$

Das ergibt die Folge

$$t, t^2, t^2+t^3, 2t^3+qt^3+t^4, t^3+qt^3+3t^4+2qt^4+q^2t^4+t^5, \ldots$$

Wenn wir wieder $F_n(x)$ in der Gestalt

$$F_n(x) = \sum g(n,k)\begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}$$

schreiben, so ist

$$E^{-1}\Delta F_n(x) = \sum g(n,k)\begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix} = (t+\Delta E^{-1}\Delta)F_{n-1}(x) =$$

$$= tF_{n-1}(x) + \sum g(n-1,l)\sum q^{l-i-2}\begin{bmatrix} x+l-i-3 \\ l-i-2 \end{bmatrix}$$

und daher durch Koeffizientenvergleich

$$g(n,k) = tg(n-1,k-1) + q^{k-1}\sum_{i\geq 0} g(n-1,k+i+1)$$

$$\text{mit } g(n,0) = \delta_{n,0} \quad \text{und} \quad g(0,k) = \delta_{0,k}.$$

Daher ist $g(n, k)$ das Gewicht der Gitterwege von (0,0) nach (n, k) mit beliebigen Abstiegen, aber ohne horizontale Wegstücke, wobei wieder nur die Endpunkte der Abstiege zu berücksichtigen sind und die Aufstiege das Gewicht t haben.

Für die Motzkinzahlen $m_n(t,q) := f(n+1,1,t) = F_{n+1}(1)$ ergibt sich daher

$$m_n(t,q) = F_{n+1}(1) = \sum_{i\geq 0} g(n+1,k+i+1) = g(n+2,1) + g(n+1,1).$$

Sie zählen daher alle Gitterwege der Länge $n+1$ ohne horizontale Wegstücke, wobei das Gewicht eines Weges durch

$$w(v) = t^{\ell}q^{\sum \sigma_i}$$

gegeben ist, wobei 1 die Anzahl der Aufstiege bedeutet und σ_i die Höhen der Endpunkte der Abstiege sind.

Ordnet man wieder jedem Abstieg der Höhe $i, i \geq 1$, einen Aufstieg, gefolgt von $i+1$ Abstiegen zu, so zählt $g(n+2,1)$ die Catalanwege von $(0,0)$ nach $(2n+3,1)$ ohne isolierte Abstiege, d.h. wo jeder Abstieg entweder als Vorgänger oder Nachfolger wieder einen Abstieg hat und $g(n+1,1)$ zählt analog dieselbe Art von Catalanwegen von $(0,0)$ nach $(2n+1,1)$. Fügt man an einen solchen Weg noch einen Aufstieg und einen Abstieg an, so zählen beide zusammen gerade alle Catalanwege von $(0,0)$ nach $(2n+3,1)$ ohne „seichte Täler", d.h. ohne Täler, wo nur ein einzelner Abstieg vor dem nächsten Aufstieg vorhanden ist, mit dem Gewicht $t^{\ell}q^{\Sigma\tau_i}$, wobei die τ_i+1 die Höhen der Täler sind und ℓ die Anzahl der Aufstiege minus der Anzahl der maximalen absteigenden Wege ist. Diese Catalanwege entsprechen den „steilen Dyckwörtern" in der Terminologie von [2].

Sei nun $f_{n,l}(x) = \left(T\left(tE + \frac{1}{q}\Delta^2\right)\right)^{l-1} q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix},\ 0 \leq l \leq n.$

Schreiben wir $f_{n,l} = q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$ in der Gestalt

$$f_{n,l} = q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n,i} F_{i+1},$$

dann ist

$$f_{n,l} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n,i} F_{i+l}, \quad 0 \leq l \leq n.$$

Nun gilt wie oben

$$f_{n,l}(1) = 0, \quad 1 \leq l \leq n-1,$$

$$f_{n,n}(1) = q^{-(n-1)}$$

und

$$b_{n,n-1} = q^{-\binom{n}{2}} t^{-n}$$

Weiters ist

$$f_{n,0}(x) = \frac{1}{t}\left(1 + \Delta + \frac{\varepsilon^{-1}}{qt}\Delta^2\right)^{-1} \varepsilon^{-1} q^{\binom{n-1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{q^{-(n-1)}}{t} \sum (-1)^i \left(\Delta + \frac{\varepsilon^{-1}\Delta^2}{qt}\right)^i q^{\binom{n-1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$$

Wegen $(\varepsilon^{-1} \ \Delta^2)\Delta = q\Delta(\varepsilon^{-1} \ \Delta^2)$ ergibt sich aus dem q-binomischen Lehrsatz (vgl. z.B. [3])

$$f_{n,0}(x) = \frac{q^{-(n-1)}}{t} \sum (-1)^i \sum_j \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \Delta^{i-j} \left(\frac{\varepsilon^{-1}\Delta^2}{qt}\right)^j q^{\binom{n-1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{q^{-(n-1)}}{t} \sum (-1)^i \sum_j \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \left(\frac{1}{qt}\right)^j q^{j-ij} q^{\binom{n-1-i-j}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n-1-i-j \end{bmatrix}$$

Daher ist

$$b_{n,0} = f_{n,0}(0) = \frac{q^{-(n-1)}}{t} \sum_j (-1)^{n-1-j} \begin{bmatrix} n-1-j \\ j \end{bmatrix} \left(\frac{1}{qt}\right)^j q^{j-(n-1)j+j^2} \tag{56}$$

Somit ergeben sich für die Hankelmatrizen

$K_n^b = (m_{i+j+b}(t,q))_{i,j=0}^{n-1}$ die Formeln

$$\frac{K_{n-1}^0}{K_n^0} = \frac{b_{n,n-1}}{f_{n,n}(1)} = \frac{1}{q^{\binom{n-1}{2}} t^n} \tag{57}$$

und

$$\frac{K_{n-1}^1}{K_n^0} = \frac{(-1)^{n-1} b_{n,0}}{f_{n,n}(1)} = q^{n-1} \sum (-1)^i \begin{bmatrix} n-1-i \\ i \end{bmatrix} q^{i^2} \left(\frac{1}{q^{n-1}t}\right)^{i+1} \tag{58}$$

Insgesamt erhalten wir den

Satz 5. *Seien $m_n(t,q)$ die durch (55) definierten gewichteten q-Motzkinzahlen, dann haben die Hankelmatrizen*
$K_n^b(t,q) = (m_{i+j+b}(t,q))_{i,j=0}^{n-1}$ *die folgenden Determinanten:*

$$\det K_n^0(t,q) = t^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{n}{3}} \tag{59}$$

und

$$\det K_n^1(t,q) = t^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{n+1}{3}} q^n \sum (-1)^i \begin{bmatrix} n-i \\ i \end{bmatrix} q^{i^2} \left(\frac{1}{q^n t}\right)^{i+1} \tag{60}$$

Zum Abschluß sei noch eine kleine Modifikation der vorangehenden q-Motzkinzahlen skizziert: Wir bezeichnen die entsprechenden Objekte mit einem Querstrich.

Sei
$\bar{f}(n,k,s) = \bar{f}(n-1,k-1,s) + \bar{f}(n-1,k,s) + q^k s \bar{f}(n-1,k+1,s)$.
Das entspricht den q-Polynomen $\bar{F}_n(x)$ mit
$\Delta \bar{F}_n(x) = (1 + \Delta + qs\varepsilon\Delta^2)\bar{F}_{n-1}(x)$ und den q-Motzkinzahlen
$\bar{m}_{n+1}(s,q) = \bar{m}_n(s,q) + sq\sum_{i=0}^{n-1} \bar{m}_i(qs,q)\bar{m}_{n-i-1}(s,q), \quad \bar{m}_0(s,q) = 1,$
also der Folge
$1, 1, 1+qs, 1+3qs, 1+6qs+q^2s^2+q^3s^2, 1+10qs+5q^2s^2+5q^3s^2, .$
Hier zeigt man ganz analog, daß

$$\det \bar{K}_n^0(s,q) = s^{\binom{n}{2}} q^{\binom{n+1}{3}}$$

und

$$\det \bar{K}_n^1(s,q) = s^{\binom{n}{2}} q^{\binom{n+1}{3}} \sum (-1)^i \begin{bmatrix} n-i \\ i \end{bmatrix} q^{i^2} s^i$$

gilt.

Für die in [2] betrachteten q-Motzkinzahlen scheinen dagegen keine so schönen Resultate zu gelten.

Bemerkung. Zum Vergleich seien noch die Resultate erwähnt, die man mit der Methode von Gessel-Viennot erhalten würde:
Für

$$a(n,k) = aq^{\lambda(k-1)}a(n-1,k-1) + bq^{\mu(k-1)}a(n-1,k) + cq^{\nu(k-1)}a(n-1,k+1)$$

liefert diese Methode für die Determinanten $d_{n,h} = \det(a(i+j+h,1))_{i,j=0}^{n-1}$ die Rekurrenzen

$$d_{n,1} = a^n c^{n-1} q^{\lambda\binom{k}{2}+\nu\binom{k-1}{2}} d_{n-1,1}$$

und

$$d_{n,2} = a^{n-1} bc^{n-1} q^{\lambda\binom{n}{2}+\mu(n-1)+\nu\binom{n-1}{2}} d_{n-1,2} - a^{2n-2} c^{2n-2} q^{2\lambda\binom{n}{2}+2\nu\binom{n-1}{2}} d_{n-2,2}.$$

Daraus lassen sich die meisten obigen Resultate ebenfalls herleiten. Im Fall der q-Motzkinzahlen liefert (56) aber eine explizite Formel, die aus der Rekurrenz nicht so einfach ableitbar ist.

Literatur

[1] Aigner, M.: Catalan-like numbers and determinants. J. Comb. Theory **A87**, 33–51 (1999).
[2] Barcucci, E., Del Lungo, A., Fédou, J. M. Pinzani, R.: Steep polyominoes, q-Motzkin numbers and q-Bessel functions. Discrete Math. **189**, 21–42 (1998).
[3] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten I. Mh. Math. **88**, 87–105 (1979).
[4] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten IV ÖAW Sitzungsber. **205**, 169–174 (1996).
[5] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten VI. ÖAW Sitzungsber. **206**, 253–266 (1997).
[6] Cigler, J.: q-Catalan und q-Motzkinzahlen. ÖAW Sitzungsber. **208**, 3–20 (1999).
[7] Fürlinger, J., Hofbauer, J.: q-Catalan numbers. J. Comb. Theory **A40**, 248–264 (1985).
[8] Gessel, I., Viennot, G.: Binomial determinants, paths, and hook length formulae. Adv. Math. **58**, 300–321 (1985).
[9] Hilton, P., Pedersen, J.: The ballot problem and Catalan numbers. Nieuw Arch. Wiskd., IV. Ser. 8, **2**, 209–216 (1990).
[10] Rota, G.-C.: Finite operator calculus. San Diego: Academic Press 1975.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Johann Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, Universität Wien, A-1090 Wien.